1736 116

ZEITSCHRIFT DES VEREINES DEUTSCHER INGENIEURE

★ SCHRIFTLEITER: C. MATSCHOSS ★

Bd. 77 SONNABEND, 4. FEBRUAR 1933 Nr. 5

Querschnitt und Umriß

Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung

Von L. PRANDTL, Göttingen

Mitteilung aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung[1])

Bei allen technisch wichtigen Strömungsvorgängen spielen die unregelmäßig durcheinander wirbelnden Bewegungen, die man Turbulenz nennt, eine hervorragende Rolle. Die Turbulenz ist einerseits Ursache der unerwünschten Strömungswiderstände, andererseits hat sie auch die sehr nützliche Eigenschaft, Druckanstiege in den Strömungen zu ermöglichen. Die Beherrschung dieser Vorgänge ist für den Strömungsfachmann sehr wichtig; es sind deshalb gerade in letzter Zeit zahlreiche Forschungsarbeiten unternommen worden, um die Gesetze der turbulenten Strömung aufzuklären. In dem nachstehenden Aufsatz ist versucht worden, die wichtigsten Ergebnisse dieser Forschungen übersichtlich zusammenzufassen. Es werden dabei eine Reihe von Beziehungen behandelt, die auch für den Praktiker von unmittelbarem Interesse sind.

In den ersten beiden Abschnitten werden zwei im Vordergrund stehende Fragen behandelt, nämlich die nach den Ursachen der Entstehung der Turbulenz und die nach den Eigenschaften der Strömungen mit ausgebildeter Turbulenz. Im dritten Abschnitt werden daraus Folgerungen für die Strömung entlang einer rauhen Wand gezogen, wobei sich eine wichtige Beziehung für die Geschwindigkeitsverteilung ergibt. Es folgt nunmehr die Anwendung auf das gerade rauhe und glatte Rohr. Hier war es möglich, für die Geschwindigkeit und für den Strömungswiderstand Formeln zu entwickeln, die mit den Versuchen in vorzüglichem Einklang stehen und die auch, im Gegensatz zu den bisherigen rein empirischen Formeln, für die ganz großen Reynoldsschen Zahlen gültig bleiben, für die keine Messungen mehr vorliegen. Die Besonderheiten in Rohren mit feinkörniger Rauhigkeit bei mäßigen Reynoldsschen Zahlen erfahren eine einheitliche Darstellung durch eine einzige Kurve. Versuchsergebnisse mit künstlich rauh gemachten Rohren werden mitgeteilt. Sie bestätigen die erwähnte Beziehung.

Die an Rohren gewonnenen Ergebnisse werden auf den Widerstand von längs angeströmten Platten übertragen. Weiter werden die Eigenschaften der Strömung in erweiterten und verengten und in gekrümmten Kanälen sowie die Mischungsvorgänge von Flüssigkeitsstrahlen mit ihrer Umgebung und auch die Nachlaufvorgänge hinter bewegten Körpern behandelt. Schließlich werden neu entdeckte Beziehungen zwischen dem turbulenten Geschwindigkeitsaustausch und dem Wärmeaustausch mitgeteilt und daraus neue Schlüsse auf die feineren Besonderheiten der turbulenten Strömung gezogen.

Einleitung

Mit den ungeordneten Mischbewegungen, die man „Turbulenz“ nennt und die alle technisch wichtigen Strömungen beherrschen, hat sich die Forschung im letzten Jahrzehnt besonders eingehend und auch erfolgreich beschäftigt. Durch diese Mischbewegungen werden Wirkungen hervorgebracht, wie wenn die Zähigkeit der Flüssigkeit hundertfach oder zehntausendfach oder auch noch stärker erhöht wäre. Dieser Umstand verursacht den großen Widerstand der strömenden Flüssigkeiten in den Rohrleitungen, den Reibungswiderstand der Schiffe und der Luftschiffe und andere dem Ingenieur unerwünschte Widerstände, aber auch die Möglichkeit eines Druckanstieges in Diffusoren oder entlang Flugzeugflügeln und Gebläseschaufeln. Ohne Turbulenz wäre hier überall Ablösung der Strömung zu erwarten, d. h. nur geringer Wiedergewinn von Energie beim Diffusor oder schlechte Wirkung der Flügel und Schaufeln.

Die Forschung beschäftigt sich einerseits mit der zahlenmäßigen Tatsachenfeststellung, andererseits mit der systematischen Ordnung der Tatsachen. Meist dringt man dabei nicht bis zu einer wirklichen Theorie vor (die sehr schwierig ist), sondern es müssen Betrachtungen aushelfen, bei denen die theoretischen Schlüsse durch Erfahrungstatsachen gestützt werden. Vielfach führen dabei schon Dimensionsbetrachtungen zusammen mit anschauungsmäßigen Einsichten zu wichtigen Aufschlüssen. Sobald z. B. Dichte (d. h. Trägheit) und Zähigkeit die einzigen für den Vorgang maßgebenden Eigenschaften der Flüssigkeit sind, wird man zu einer

$$\text{Reynoldsschen Zahl} = \frac{\text{Dichte}}{\text{Zähigkeit}} \cdot \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Länge}$$

geführt ($Re = \frac{v\,l}{\nu}$, wobei ν die „kinematische Zähigkeit“, d. i. Zähigkeit : Dichte ist). Wenn in zwei Fällen die Reynoldssche Zahl denselben Zahlenwert hat, so hat man bei beiden Strömungen genau übereinstimmenden Ablauf zu erwarten, nur je nach den Umständen mit einem andern Längen- und Zeitmaßstab. Bei der Anwendung dieser Regel kann es allerdings im Einzelfall noch einer besonderen Überlegung bedürfen, welche Geschwindigkeit und welche Länge bei dem Vorgang als wirklich maßgebend anzusehen ist.

Zwei Fragestellungen sind es vor allem, mit denen man sich in Theorie und Versuch beschäftigt hat:

1. Wie und unter welchen näheren Umständen entsteht Turbulenz?
2. Was läßt sich über die ausgebildete turbulente Bewegung, besonders über die Mittelwerte der Geschwindigkeiten und der Kräfte, aussagen?

Die zweite Fragestellung ist offenbar die technisch wichtigere.

[1]) Erweiterte Wiedergabe eines Vortrages vor der Prager Ortsgruppe der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik am 5. Mai 1932 in der Deutschen Technischen Hochschule zu Prag. In dem Vortrag über „Formen der strömenden Bewegung“ am 16. Oktober 1932 gelegentlich der Wissenschaftlichen Tagung des Vereines deutscher Ingenieure konnte auf die hier behandelten Zusammenhänge kurz hingewiesen werden.

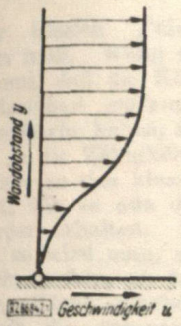

Abb. 1. Geschwindigkeitsprofil mit Wendepunkt.

Entstehung der Turbulenz

Bezüglich der ersten Frage kann ich mich ziemlich kurz fassen, weil ich mich über den derzeitigen Stand vor kürzerer Zeit erst geäußert habe [5][2]) und weil hier auch vieles noch in der Schwebe ist. Die wichtigste Feststellung ist die, daß Turbulenz immer dann entsteht, wenn das Geschwindigkeitsprofil einen Wendepunkt aufweist, Abb. 1, und wenn dabei die Zähigkeitseinflüsse nicht zu stark sind. Eine Strömung mit einem solchen Geschwindigkeitsprofil ist nämlich bei Abwesenheit von Flüssigkeitsreibung instabil, d. h. kleine Abweichungen in der Größe und in der Richtung der Geschwindigkeit vergrößern sich von selbst und führen einen völligen Umschlag der Strömung herbei. Eine ursprünglich schwache Wellung in den Stromlinien führt so allmählich durch Überschlagen der Wellen zur Ausbildung von Wirbeln. Durch starke Zähigkeitswirkungen können diese Vorgänge allerdings verhindert werden.

Man erkennt daraus, daß die Neigung zum Turbulentwerden um so größer ist, je größer die Reynoldssche Zahl ist. Geschwindigkeitsprofile mit Wendepunkt kommen z. B. in den durch Zähigkeitswirkungen hervorgebrachten Gleitschichten[3]) an den Wänden vor, wenn der Druck in der Strömungsrichtung ansteigt oder, anders gesagt, wenn die Flüssigkeit verzögert strömt. Solche Stellen in der Flüssigkeit neigen daher besonders stark zum Turbulentwerden. Aber auch die unbeschleunigte Geradeausströmung längs einer Wand wird bei hinreichend großer Reynoldsscher Zahl turbulent. Man kann dies damit erklären, daß der Zustrom niemals absolut störungsfrei ist und daß immer Unregelmäßigkeiten in der Geschwindigkeitsverteilung vorkommen. Vor allem dürften Drehbewegungen mit Achsen parallel zur Strömungsrichtung, die sehr wenig gedämpft verlaufen, erheblichen Anteil an der Schaffung von instabilen Geschwindigkeitsverteilungen haben. Durch solche Drehungen werden nämlich Teile der Flüssigkeit an die Wand heran und andere von ihr fort geführt, und es kommen so, selbst bei geringer Geschwindigkeit der Störungsbewegung, im Verlauf der Zeit Teile geringer Geschwindigkeit zwischen solche mit großer Geschwindigkeit, was unbedingt zu Instabilitäten führt.

Im übrigen gibt es noch eine andere Art von Turbulenzbeginn, die auf theoretischem Wege entdeckt wurde [2, 3 u. 4] und die besonders dann in Betracht kommt, wenn Störungen der vorgenannten Art nicht vorliegen. Bei der Strömung längs einer Wand kommt eine Art langwelliger Störungen vor, die oberhalb einer bestimmten kritischen Reynoldsschen Zahl von selbst im Verlauf der Zeit an Stärke zunehmen und so, wenn ihre Amplituden groß genug geworden sind, in ihren verzögerten Bezirken die Vorbedingung für das Turbulentwerden hervorbringen. Bemerkenswert ist, daß die von *Tollmien* [4] und *Schlichting* [6] theoretisch ermittelten kritischen Reynoldsschen Zahlen für zwei verschiedene Fälle in gutem Einklang mit den Versuchswerten sind.

Versuche über die Entstehung der Turbulenz. Um über diese Frage mehr Klarheit zu erhalten, haben wir die Entstehung der Turbulenz durch Versuche in einem 20 cm weiten und 6 m langen Kanal im einzelnen näher verfolgt. So sorgfältig wir dabei auch vorgingen, so war es doch nicht möglich, alle Einlaufstörungen hinreichend zu beseitigen, so daß bald hier, bald dort in unregelmäßiger Folge ein Herd von turbulenter Bewegung auftrat, der sich nun ziemlich rasch weiter ausdehnte.

Klarere Bilder ergaben sich, wenn wir selbst absichtlich eine Störung in die Strömung hineinsetzten, so z. B., daß wir durch ein aus Siebblech gebildetes kurzes Wandstück etwas Wasser hinzutreten ließen oder absaugten. Im ersteren Fall, wo also eine kleine Flüssigkeitsmenge, die an der Strömung noch nicht teilnimmt, zwischen Wand und bewegte Masse geschoben wird, ist sofort Instabilität vorhanden, und die Turbulenz beginnt an der Eintrittstelle. Die eintretenden Mengen können dabei sehr gering sein. Im Fall des Absaugens war die Stelle am stärksten gestört, die sich im Augenblick des Beginns des Absaugens am Siebblech befunden hatte. Hinter dieser Stelle ist durch das Absaugen die Gleitschicht dünner, und die inneren Flüssigkeitsteile, die der Gleitschicht voreilen, müssen deshalb über eine Art Stufe von der dünneren Gleitschicht auf die stromabwärts befindliche dickere Gleitschicht hinaufströmen. Diese Störung genügt, um in einiger Zeit die Strömung in Unordnung zu bringen und die Gleitschicht zum Zerfall zu bringen. Die Bilderreihe von Abb. 2 zeigt diese Entwicklung und das weitere Anwachsen dieses Turbulenzherdes.

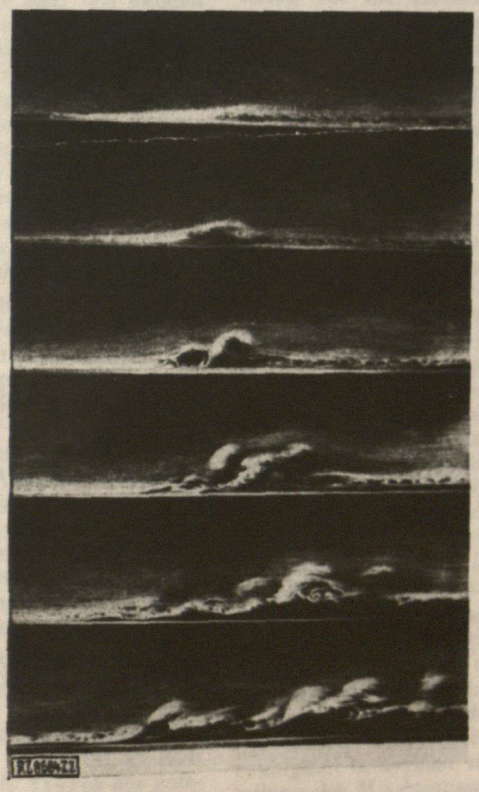

Abb. 2
Entstehung der Turbulenz aus einer anfänglichen Störung.

Die Strömung ist durch Aufstreuen von Aluminiumstaub auf die Wasseroberfläche sichtbar gemacht. Das Aufnahmegerät, ein langsam arbeitender Kinoapparat, fährt auf einem Wagen mit der Strömung mit, so daß dauernd dieselbe Wirbelgruppe im Gesichtsfeld bleibt. Im obersten Bild ist links die Absaugstelle (an den schräg verlaufenden Stromlinien erkennbar), in der Mitte die „Stufe", durch deren Aufrollen der erste Wirbel entsteht. Stromaufwärts von ihm entsteht ein weiterer usf. Im letzten Bild ist der erste Wirbel ganz rechts zu sehen. Man sieht, daß er Wasser aus der Gleitschicht (die absichtlich dichter mit Aluminium bestreut war) weit ins Innere der Strömung hineingeführt hat.

Grundbegriffe der ausgebildeten Turbulenz

Ich wende mich jetzt zu den Gesetzmäßigkeiten der fertig ausgebildeten Turbulenz. Die Darstellung, die ich dabei wähle, folgt nicht der geschichtlichen Entwicklung, sie soll dafür den heute erreichten Stand um so deutlicher werden lassen. Ich beginne mit einer Betrachtung, die sich auf das Verhalten einer idealen Flüssigkeit ohne jede Zähigkeit bezieht. Solche Flüssigkeiten gibt es zwar in Wirklichkeit nicht, es ist aber für vielerlei Überlegungen von Vorteil, festzustellen, was von einer solchen idealen Flüssigkeit zu erwarten wäre, weil die Gesetze der idealen Flüssigkeit wegen der Abwesenheit der Zähigkeit einfacher sind als die für eine wirkliche Flüssigkeit.

Nach unseren bisherigen Feststellungen tritt Turbulenz um so leichter ein, je größer die Reynoldssche Zahl ist oder, mit anderen Worten, je kleiner unter sonst gleichen Umständen die Zähigkeit ist. Geht man nun zur Grenze Zähigkeit gleich null, so wird die Reynoldssche Zahl offenbar unendlich, und wir folgern daraus, daß die Strömung

[2]) Die Ziffern in eckigen Klammern beziehen sich auf das Schriftenverzeichnis am Schluß des Aufsatzes.
[3]) Sonst auch Grenzschichten oder Reibungsschichten genannt.

der idealen Flüssigkeit im allgemeinen turbulent sein muß. Wenn man allerdings gleichzeitig noch annimmt, daß die Körper oder Wände, an denen sich die Flüssigkeit entlang bewegt, eine mathematisch glatte Oberfläche haben, so würde sich die Oberflächenreibung, da ja die Zähigkeit fehlt, gleich null ergeben, und man würde so das klassische Verhalten der idealen Flüssigkeit, wie es aus der alten Hydrodynamik bekannt ist, wieder erhalten. Nimmt man aber rauhe Oberflächen an, so wird man, seien die einzelnen Rauhigkeiten auch noch so fein, an jeder einzelnen Rauhigkeit eine Trennungsfläche annehmen können[4]). Die Strömung erhält durch die gegenseitige Einwirkung der verschiedenen kleinen Trennungsflächen, die in sich instabil sind und einander in Unordnung bringen, einen turbulenten Charakter; dabei ergibt sich an jeder Rauhigkeit ein Druckunterschied zwischen ihrer Vorder- und Rückseite und damit auch ein Widerstand, der proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit ist.

Wir wollen dieser Betrachtung entnehmen, daß man mit gutem Recht über die Gesetze der Turbulenz theoretische Überlegungen anstellen darf, bei denen man die Zähigkeit der Flüssigkeit gleich null setzt. Die folgenden Darlegungen werden deutlich zeigen, daß man sich damit auf dem rechten Wege befindet, d. h. daß tatsächlich im Inneren der Strömung die turbulenten Widerstände von der Zähigkeit praktisch nicht mehr abhängen. In einer schmalen Zone in der Nähe der Wände bleibt der Einfluß der Zähigkeit allerdings bestehen, sofern er nicht von dem Einfluß einer groben Rauhigkeit überdeckt wird.

Für die genauere Untersuchung der turbulenten Mischungsvorgänge hat sich ein Begriff als nützlich erwiesen, der hier kurz erläutert werden soll. Es handelt sich um den sogenannten **Mischungsweg**, der bei den turbulenten Mischungsvorgängen eine ähnliche Rolle spielt wie die mittlere freie Weglänge bei der molekularen Diffusion in einem Gase. Bei diesen beiden Arten von Vorgängen kommen Schubspannungen (oder genauer genommen scheinbare Schubspannungen) dadurch zustande, daß zwischen Schichten der Flüssigkeit, die mit verschiedenen Geschwindigkeiten nebeneinander herströmen, dauernd Bewegungsgröße ausgetauscht wird. Man kann sich von diesen in Wirklichkeit ziemlich verwickelten Vorgängen folgende vereinfachte Vorstellung machen.

Man nimmt an, daß irgendein Teilchen, das auf Grund eines Zusammenstoßes mit seinen Nachbarn eine Geschwindigkeit quer zur Strömung erhalten hat, in der Strömungsrichtung im Mittel die Bewegungsgröße hat, die der Schicht, aus der es stammt, als Mittelwert zukommt, und daß es nun eine Strecke l quer zur Strömung zurücklegt, bevor es mit neuen Teilchen zusammenstößt oder sich mit ihnen vermengt. Derartige Austauschbewegungen gehen in beiden Richtungen vor sich, und es werden so von der schnelleren Schicht Teile aufgenommen, die aus der langsameren Schicht stammen, wodurch die schnellere Schicht natürlich verzögert wird, und umgekehrt treten in die langsamere Schicht Teile der schnelleren Schicht ein und wirken hier beschleunigend.

Die Wirkung der beiden Flüssigkeitsschichten aufeinander ist also gerade so, als ob zwischen ihnen Reibung bestände. Der Unterschied zwischen den molekularen Vorgängen und den turbulenten besteht dabei nur darin, daß in dem einen Fall die einzelnen Molekeln, in dem anderen Fall ganze Flüssigkeitsballen die Träger des Austausches sind. Ist u die Geschwindigkeit der Strömung und ist y die Koordinate in der Richtung quer zur Strömung, in der sich die Geschwindigkeitsänderung vollzieht, so ist der Unterschied der Geschwindigkeiten von zwei Schichten, die um die Entfernung l auseinanderliegen, in erster Näherung $= l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$. Dies ist nach dem Vorstehenden also auch der Geschwindigkeitsunterschied eines Teilchens, das sich, aus der anderen Schicht kommend, neu mit seiner jetzigen Umgebung vermengt.

[4]) In schwach reibenden Flüssigkeiten findet man an in die Flüssigkeit vorspringenden Wandteilen regelmäßig Ablösung der Strömung. Beim Grenzübergang zu verschwindender Zähigkeit ergeben sich daraus Helmholtzsche Trennungsflächen mit endlichem Geschwindigkeitssprung.

Um die Größe der Reibungskraft, genauer gesprochen der Schubspannung zwischen den beiden Schichten, zu ermitteln, muß man noch wissen, wie groß die sekundlich ausgetauschte Masse ist. Man kann diese, bezogen auf die Flächeneinheit, ausdrücken durch das Produkt aus der Dichte $\varrho\,(=\gamma/g)$ und einer Austauschgeschwindigkeit v'. Im Fall der Molekularbewegung ist diese Geschwindigkeit proportional der Geschwindigkeit der Wärmebewegung. Da diese zu je einem Drittel nach der x-Achse, nach der y-Achse und nach der z-Achse erfolgt und für den Austausch in unserem Beispiel nur der y-Anteil in Betracht kommt, kann man in erster Näherung $v' = c/3$ setzen, wobei c die mittlere Geschwindigkeit der Wärmebewegung ist. Damit ergibt sich die Schubspannung[5])

$$\tau = \frac{1}{3}\varrho c l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \eta\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Im Fall des turbulenten Massenaustausches liegt es nahe, die Geschwindigkeit v' von derselben Größenordnung zu nehmen wie den Geschwindigkeitsunterschied der beiden um die Entfernung l auseinander liegenden Schichten, da die Flüssigkeitsballen mit Geschwindigkeiten von dieser Größe zusammenstoßen [8, 9 und 10]. Man erhält also für die Schubspannung, wenn man den unbekannten Zahlenfaktor von v' unterdrückt, die Formel

$$\tau = \varrho\left(l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Die Unterdrückung des Zahlenfaktors bedeutet dabei nur eine etwas andere Definition von l. Durch diese Betrachtungsart erhält man also, wie es auch in der Natur zutrifft, für die einfache Zähigkeitswirkung Schubspannungen proportional $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ und für den turbulenten Austausch (wobei die nebenher vorhandene Zähigkeitswirkung unberücksichtigt bleibt) die Schubspannung proportional $\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2$, was mit den dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen hydraulischen Widerständen in gutem Einklang ist.

Mit dem Ansatz (2) wird das Problem der hydraulischen Strömungswiderstände zurückgeführt auf das andere Problem der Verteilung des Mischungsweges l in der Strömung. Solange man keine rationelle Theorie der turbulenten Strömung hat, die die Gesetze der turbulenten Vorgänge aus den hydrodynamischen Differentialgleichungen ableitet, ist man allerdings darauf angewiesen, Aussagen über die Verteilung des Mischungsweges aus den Versuchen zu gewinnen, so daß also nur eine Unbekannte durch eine andere ersetzt ist. Trotzdem ergibt sich aber ein erheblicher Gewinn, da sich zeigt, daß, wenigstens bei den größeren Reynoldsschen Zahlen[6]), der Mischungsweg praktisch von der Größe der Geschwindigkeit nicht mehr abhängt und sich außerdem für seine räumliche Verteilung im Durchschnitt ziemlich einfache Regeln angeben lassen.

Oft geben schon Dimensionsbetrachtungen eine brauchbare Anweisung. Für den Fall z. B., daß es sich um eine Strömung in der Nähe einer mehr oder minder glatten ebenen Wand handelt, ist man unter der Voraussetzung, daß sich an der betrachteten Stelle im Flüssigkeitsinnern weder Zähigkeitseinflüsse noch die Wandrauhigkeit bemerkbar machen, in der Lage, über die Verteilung des Mischungsweges eine Aussage zu machen. An einem Punkt im Abstand y von der Wand ist nach Lage der Aufgabe keine andere für den dortigen Zustand kennzeichnende Länge auffindbar als eben dieser Wandabstand y selbst. Der Mischungsweg l ist auch eine Länge; so bleibt keine andere Möglichkeit als die, den Mischungsweg dem Wandabstand proportional zu setzen:

$$l = \varkappa y.$$

$\varkappa$ ist dabei ein universeller Zahlenbeiwert, der aus Versuchen bestimmt werden kann. Wenn man einen Strö-

[5]) Durch eine strengere Betrachtung fand *Boltzmann* für die Zähigkeit η den von dem in Gl. (1) wenig abweichenden Wert $\eta = 0{,}3568\,\varrho c l$.

[6]) Von etwa $Re = 10^3$ aufwärts.

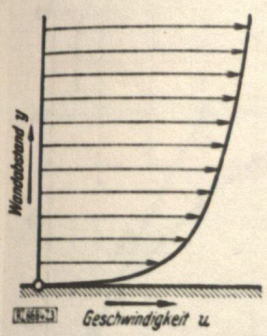

Abb. 3. Geschwindigkeitsprofil nach Gl. (3).

mungszustand voraussetzt, bei dem die Schubspannung τ konstant ist, ergibt sich also gemäß Gl. (2)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\varkappa y}\sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}$$

und daher

$$u = \frac{1}{\varkappa}\sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}\,(\ln y + \text{const.}) \quad (3).$$

Ein derartiger Verlauf der Geschwindigkeit abhängig vom Wandabstand ist nun in der Tat ganz von der Art, wie das wirklich beobachtet wird, Abb. 3. Durch Vergleich mit Versuchsergebnissen findet man als runden Wert von $\varkappa$ die Zahl 0,4.

Kármánsche Theorie

Prof. *v. Kármán* hat in einer sehr viel beachteten Arbeit [12] die Aufgabe so formuliert, daß er die Annahme macht, daß die turbulenten Mischungsvorgänge in allen Fällen in derselben Weise ablaufen, so daß von einem Fall zu einem andern und auch von einer Stelle der Strömung zur andern nur Unterschiede bezüglich des Längenmaßstabes und des Zeitmaßstabes bestehen. Die Wirkungen der Zähigkeit werden dabei neben denjenigen der Turbulenz als vernachlässigbar angesehen. Über diese beiden Maßstäbe, von denen der erstere seinem Sinne nach offenbar mit unserem Mischungsweg l übereinstimmt, werden nun aus den Eulerschen Gleichungen Aussagen geschöpft; die Geschwindigkeit u der Grundströmung, die als Funktion von y allein angenommen wird, wird dabei von der betrachteten Stelle aus in eine nach dem quadratischen Glied abgebrochene Taylorreihe entwickelt. Die mittlere Geschwindigkeit, mit der das betrachtete Teilchen sich vorwärts bewegt, ist ohne unmittelbaren Einfluß auf dessen innere Bewegung. Es kommen hierfür deshalb von den gegebenen Größen nur $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$ und $\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}$ in Betracht. Zunächst ergibt sich als Zeitmaßstab für den Ablauf des Mischungsvorgangs eine Zeit

$$T \sim 1\Big/\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\ ^{7}).$$

Die Störungsgeschwindigkeiten u' in der X-Richtung und v' in der Y-Richtung ergeben sich damit aus Dimensionsgründen proportional l/T, also

$$u' \sim v' \sim l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y},$$

was mit den früheren Darlegungen übereinstimmt. Für den Längenmaßstab des Mischungsvorgangs findet *v. Kármán* die Beziehung

$$l = \varkappa'\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\Big/\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2},$$

wobei $\varkappa'$ eine aus den Versuchen zu ermittelnde Konstante ist. Diese Aussage der Kármánschen Theorie geht somit über das Bisherige hinaus, da sie unabhängig von einer Wandentfernung eine Rechenvorschrift für die Größe des Mischungswegs liefert. Führt man diese Beziehung in unsere Gl. (2) ein und integriert sie unter der Annahme einer in dem betreffenden Gebiet konstanten Schubspannung, so erhält man

$$u = \frac{1}{\varkappa'}\sqrt{\frac{\tau}{\varrho}}\,[\ln(y + C_1) + C_2] \quad \ldots\ldots (4)$$

also praktisch wieder unsere Gl. (3). Die geforderte Übereinstimmung mit den Versuchsergebnissen führt nun offensichtlich dazu, $\varkappa' = \varkappa$ zu setzen. Es ergeben also in dem Fall einer konstanten Schubspannung die beiden Ansätze dieselbe Geschwindigkeitsverteilung.

Bei andern Annahmen über die Schubspannung ergibt sich keine Übereinstimmung mehr. Im übrigen entbehrt hier sowohl der Ansatz $l = \varkappa y$ einer stichhaltigen Begründung, da infolge der Veränderlichkeit der Schubspannung noch eine weitere Länge $\tau\big/\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}y}$ zur Verfügung steht; aber auch der Kármánsche Ansatz

$$l = \varkappa\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\Big/\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}y^2}$$

bedeutet hier nur noch eine rein abschätzende Näherung, da er nur dadurch gewonnen worden ist, daß man in der Reihenentwicklung für u die Wirkung von $\frac{\mathrm{d}^3u}{\mathrm{d}y^3}$ und höheren Gliedern außer acht gelassen hat. In dem Fall $\tau = \text{const}$ fallen die beiden Lösungen deshalb zusammen, weil die Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (3) durch Änderung des Längenmaßstabes und gleichzeitige passende Änderung der Integrationskonstante in sich übergeführt wird, falls die Schubspannung τ ungeändert bleibt, so daß hier eine strenge Ähnlichkeit auch der Grundströmung vorliegt.

Aus Gl. (3) ist leicht zu ersehen, daß die Größe $\sqrt{\tau/\varrho}$ eine Geschwindigkeit ist. Diese Geschwindigkeit ist uns für verschiedene, in folgendem anzustellende Ähnlichkeitsbetrachtungen sehr wertvoll. Wir wollen sie deshalb mit v_* bezeichnen und „Schubspannungsgeschwindigkeit" nennen. Die Formel

$$\tau = \varrho\, v_*^2$$

ist von ähnlichem Bau wie diejenige für den Staudruck

$$p_d = {}^1\!/_2\,\varrho\, u^2,$$

was aus Dimensionsgründen verständlich ist, da die Schubspannung auch eine Kraft je Flächeneinheit ist. Zahlenmäßig ist die scheinbare Schubspannung τ der Turbulenz meist sehr klein gegenüber dem Staudruck; es handelt sich daher bei v_* auch um eine Geschwindigkeit, die verhältnismäßig klein gegen die Strömungsgeschwindigkeit u ist. Der Vergleich mit Gl. (2) zeigt übrigens, daß

$$v_* = l\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$$

ist; v_* ist also von der Größenordnung der Mischgeschwindigkeiten u' und v'.

Strömung längs einer rauhen Wand

Die Strömung längs einer rauhen Wand ist von unserem Standpunkt aus einfacher als die längs einer glatten Wand, weil bei dieser die Zähigkeit eine maßgebliche Rolle spielt, bei jener aber nicht; es empfiehlt sich also, die Strömung längs einer rauhen Wand zuerst zu behandeln. Ist k eine die Korngröße der Wandrauhigkeit messende Länge, so folgt unter Zugrundelegung der idealen Flüssigkeit aus einer einfachen Ähnlichkeitsbetrachtung, daß die Geschwindigkeitsverteilungen in der Wandnähe bei geometrisch ähnlichen Rauhigkeiten auch geometrisch ähnlich sind, so zwar, daß die Korngröße k den Maßstab dafür abgibt. Der formelmäßige Ausdruck dieser Beziehung ist der, daß die Geschwindigkeit im Abstand y eine Funktion des Verhältnisses y/k ist. Wenn man dieser Geschwindigkeitsverteilung Gl. (3) zugrundelegt, was sich gemäß dem Vorausgehenden jedenfalls für die Gegenden weiter im Innern der Flüssigkeit empfiehlt, so ergibt sich aus dem Gesagten, daß die Integrationskonstante von Gl. (3) $= \text{const} - \ln k$ zu setzen sein wird.

Eine bisher unveröffentlichte Versuchsreihe von *Nikuradse* mit Rohren verschiedener Weite, die durch Aufkleben von gesiebtem Sand verschiedener Korngrößen mit Hilfe eines geeigneten Lackes in verschiedenem Grade rauh gemacht worden waren, ergab, daß man die neue Konstante $= 3{,}4 = \ln 30$ setzen kann; k bedeutet dabei den mittleren Korndurchmesser des zur Erzeugung der Rauhigkeit verwandten Sandes. Mit $\frac{1}{\varkappa} = 2{,}5$ ergibt sich also die Formel

$$u = 2{,}5\, v_* \ln\left(\frac{30\,y}{k}\right).$$

[7]) Zeichen ~ lies „proportional"

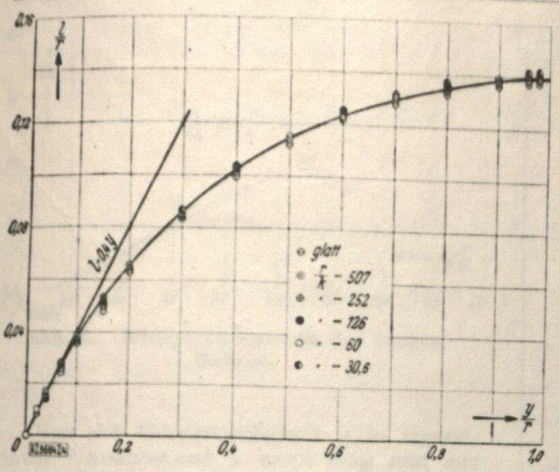

Abb. 4 (links)
Verteilung des Mischungsweges im Rohr bei großen Reynoldsschen Zahlen

$$\left[\text{Funktion } f_1\left(\frac{y}{r}\right)\right].$$

l Mischungsweg
r Rohrhalbmesser
y Abstand von der Wand
k mittlere Längenabmessung der Rauhigkeit

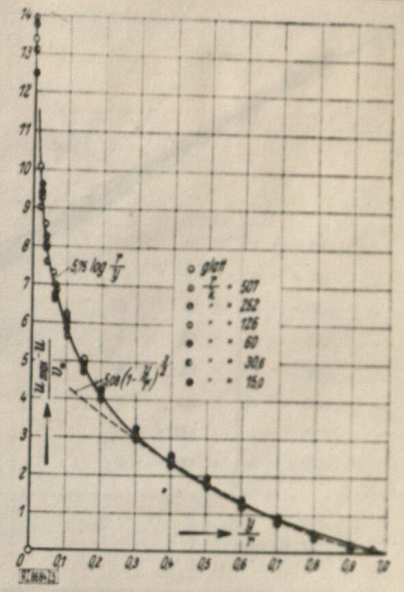

Abb. 5 (rechts)
Verlauf von $u_{max} - u$ im Rohr bei großen Reynoldsschen Zahlen

$$\left[\text{Funktion } f_2\left(\frac{y}{r}\right)\right].$$

u_{max} größte Strömungsgeschwindigkeit
u Strömungsgeschwindigkeit an der Stelle y
v_* Schubspannungsgeschwindigkeit $= \sqrt{\tau/\varrho}$
τ Schubspannung
ϱ Dichte

Durch eine Koordinatenverschiebung um den Betrag von $k/30$ läßt sich noch erreichen, daß für $y = 0$ auch $u = 0$ wird[8]). Damit wird also

$$u = 2{,}5\, v_* \ln\left(1 + \frac{30\, y}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

oder, wenn man den natürlichen Logarithmus durch den Zehnerlogarithmus ersetzt,

$$u = 5{,}75\, v_* \log\left(1 + \frac{30\, y}{k}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5a).$$

Gl. (5) bezw. (5 a) gibt somit einen festen Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeitsverteilung, der Schubspannungsgeschwindigkeit, dem Wandabstand und dem Rauhigkeitsmaß k. Dies gilt zunächst für die bei den Versuchen verwendeten Arten von Rauhigkeiten. Für andere Formen von rauhen Oberflächen wird sich statt der Zahl 30 voraussichtlich eine andere, im übrigen auch noch von der Art, das Rauhigkeitsmaß zu definieren, abhängige Zahl ergeben. Versuche darüber sind in Göttingen in Vorbereitung.

Gl. (5) gibt uns nun sofort Gelegenheit, die obige Behauptung über das Verhalten der idealen Flüssigkeit nachzuprüfen. Die Geschwindigkeit im Abstand $y = h$ sei $u = u_1$. Mit dieser Angabe läßt sich aus Gl. (5 a) v_* fortschaffen. Es wird

$$v_* = \frac{u_1}{5{,}75 \log\left(1 + 30\,\frac{h}{k}\right)}$$

und damit

$$u = u_1 \frac{\log\left(1 + 30\,\frac{y}{k}\right)}{\log\left(1 + 30\,\frac{h}{k}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Die zugehörige Schubspannung wird

$$\tau = \varrho\, v_*^2 = \frac{\varrho\, u_1^2}{33\left[\log\left(1 + 30\,\frac{h}{k}\right)\right]^2} \quad \ldots\ldots \quad (7),$$

woraus zu ersehen ist, daß diese Schubspannung proportional dem Quadrat der Strömungsgeschwindigkeit u_1 ist. Die Abhängigkeit von der Wandrauhigkeit ist durch Gl. (7) ebenfalls klargestellt.

Geht man zur mathematisch glatten Wand, also zu $k = 0$, über, so wird nach Gl. (6) u für alle Werte von y konstant $= u_1$ und $\tau = 0$, wie man es in der klassischen Hydrodynamik an der idealen Flüssigkeit gewöhnt ist. Der Unterschied ist allerdings auch deutlich, daß selbst eine submikroskopische Rauhigkeit mit einem k von der Größenordnung eines Atomdurchmessers noch erhebliche Abweichungen vom idealen Verhalten zeigen würde. Auf solche Fälle dürfen unsere Formeln in Wirklichkeit nicht mehr angewandt werden. Die Verhältnisse werden hier durch das Eingreifen der Zähigkeit wesentlich verändert, wie im folgenden noch gezeigt werden wird.

[8]) Wo die Koordinatenachse zwischen den Höckern der Rauhigkeit genau zu liegen hat, ist dabei noch eine offene, aber nicht sehr wichtige Frage.

Die Rohrströmung

Eine wichtige Feststellung ist zunächst die, daß im Innern eines geraden Rohres die Relativbewegung der Flüssigkeitsteile gegeneinander bei einigermaßen großen Reynoldsschen Zahlen nur vom Druckgefälle abhängt, dagegen gar nicht von der Beschaffenheit der Wand, so daß also bei gleichbleibendem Druckgefälle die Kurven der Geschwindigkeitsverteilung in Rohren großer und kleiner Wandrauhigkeit sich durch Verschiebung längs der Geschwindigkeitsachse zur Deckung bringen lassen (abgesehen natürlich von einem Stück unmittelbar an der Wand, das den Geschwindigkeitsanstieg dort darstellt, der natürlich bei glatterer Wand größer ist als bei rauherer). Diese Beziehung ist schon vor 75 Jahren von *Darcy* [14] gelegentlich seiner großen Arbeit über den Rohrwiderstand gefunden und auch ausdrücklich hervorgehoben worden, ist dann aber wieder vergessen worden. Sie ist bei Aachener Messungen in rauhen Kanälen von *Fritsch* [17] von neuem augenfällig festgestellt worden. Von unserem Standpunkt aus ist diese Feststellung identisch mit der Aussage, daß die Verteilung des Mischungsweges über das Rohrinnere praktisch von der Wandbeschaffenheit unabhängig ist. Unter Berücksichtigung unserer früheren Feststellungen liegt es nahe, zu vermuten, daß man für den Mischungsweg den Ansatz

$$l = r\, f_1\left(\frac{y}{r}\right)$$

machen kann, wo y der Wandabstand und r der Rohrhalbmesser ist (genau genommen würde noch eine besondere Verabredung darüber zu treffen sein, von welcher Stelle zwischen den Körnern der Rauhigkeit der Wandabstand y gerechnet werden soll; von dieser Feinheit mag hier aber abgesehen werden). Da die Verteilung der Schubspannung über das Rohr bekannt ist, wenn der Druckabfall gegeben ist, kann man aus Messungen über die Geschwindigkeitsverteilung mit Hilfe von Gl. (2) die Verteilung von l nachprüfen. Es zeigt sich, daß der obige Ansatz zumindest bei den höheren Reynoldsschen Zahlen gut bestätigt wird. Abb. 4 gibt das Ergebnis in dimensionsloser Form wieder und zeigt damit den Verlauf der Funktion f_1.

Man kann nun umgekehrt diese Funktion zugrunde legen und daraus mit Hilfe von Gl. (2) $\mathrm{d}u/\mathrm{d}y$ ausrechnen, woraus durch eine Integration auch eine Aussage über die Geschwindigkeit selbst gewonnen werden kann. Bei Einführung der Schubspannungsgeschwindigkeit v_* gewinnt diese Beziehung die Form

$$u_{max} - u = v_*\, f_2\left(\frac{y}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Diese erstmalig von *v. Kármán* [12] angeschriebene Gleichung ist ebenfalls durch die Versuche wohl bestätigt, wie Abb. 5 erweist, in die Versuchspunkte für glatte und verschieden rauhe Rohre eingetragen sind.

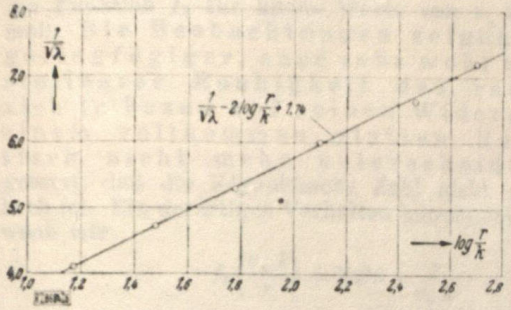

Abb. 6. Widerstandsgesetz des rauhen Rohres.

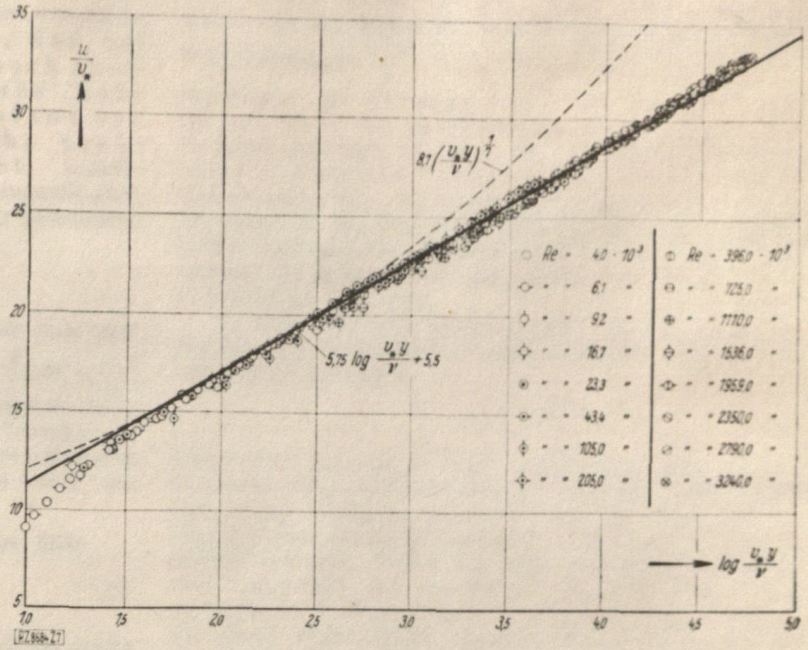

Abb. 7. Gesetz für die Geschwindigkeitsverteilung im glatten Rohr.

Von der Geschwindigkeit u in irgendeinem Wandabstand y kann man nun zur mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}$ übergehen. Man erhält dabei ersichtlich aus Gl. (8) eine Beziehung von der Form

$$u_{max} - \bar{u} = v_* \cdot \text{Zahl} \quad \ldots \quad (9).$$

Aus Göttinger Versuchen von *Nikuradse* wurde diese

$$\text{Zahl} = 4{,}07$$

ermittelt.

Ein besonderer Glücksfall hat ergeben, daß bereits unsere Gl. (3) oder die spezielle Form für rauhe Wand, Gl. (5), eine bis zur Rohrmitte brauchbare Näherung für die Funktion $f_2\left(\frac{y}{r}\right)$ liefert[9]), nämlich

$$f_2\left(\frac{y}{r}\right) = 2{,}5 \ln \frac{r}{y} = 5{,}75 \log \frac{r}{y} \quad \ldots \quad (10)[10]).$$

Damit ist nun alles zusammen, um, zunächst für das rauhe Rohr, den Widerstand für eine gegebene Menge zu berechnen.

Wir machen zunächst den üblichen Ansatz für die Widerstandszahl λ:

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\lambda}{d} \frac{\varrho \bar{u}^2}{2} \quad \ldots \quad (11).$$

Aus dem Gleichgewicht eines Wasserzylinders vom Halbmesser $r = d/2$ erhält man in bekannter Weise für die Wandschubspannung τ_0 die Beziehung

$$-\pi r^2 \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 2\pi r \tau,$$

also

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{2\tau}{r} = \frac{2\varrho v_*^2}{r} \quad \ldots \quad (12).$$

Der Vergleich von Gl. (11) und (12) liefert mit dem Rohrdurchmesser $d = 2r$

$$v_*^2 = \frac{\lambda}{8} \bar{u}^2 \quad \ldots \quad (13).$$

Durch Anwendung von Gl. (5 a) auf die Rohrmitte ($y = r$) erhält man, wenn man unter dem Logarithmus die 1 gegen den sehr großen Wert $30\,r/k$ vernachlässigt und $\log 30 = 1{,}477$ setzt,

$$u_{max} = v_* \left(5{,}75 \log \frac{r}{k} + 8{,}5\right) \quad \ldots \quad (14).$$

Anderseits ist gemäß Gl. (9)

$$\bar{u} = u_{max} - 4{,}07\, v_* = v_* \left(5{,}75 \log \frac{r}{k} + 4{,}43\right).$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (13) wird nun

$$\lambda = \frac{8 v_*^2}{\bar{u}^2} = \frac{8}{\left(5{,}75 \log \frac{r}{k} + 4{,}43\right)^2} \approx \frac{1}{\left(2{,}0 \log \frac{r}{k} + 1{,}57\right)^2} \quad (15).$$

Dies wird durch den Versuch sehr wohl bestätigt, nur mit der kleinen Abänderung, daß im Nenner besser 1,74 an Stelle von 1,57 geschrieben wird. Diese Änderung hängt mit dem in Gl. (10) unterdrückten Zusatzglied zusammen. Die experimentelle Nachprüfung der Formel erfolgt am besten durch Auftragung von $1/\sqrt{\lambda}$ abhängig von $\log \frac{r}{k}$. Es ist nach dem vorstehenden

$$1/\sqrt{\lambda} = 2{,}0 \log \frac{r}{k} + 1{,}74 \quad \ldots \quad (16).$$

Es muß sich also beim Auftragen eine Gerade ergeben. Abb. 6 zeigt diese Gerade für sechs rauhe Rohre nach Messungen von *Nikuradse* (s. a. Abb. 9). Es sei erwähnt, daß die allgemeine Form von Gl. (14) sowie eine zu Gl. (16) analoge Gleichung für eine auf u_{max} bezogene Widerstandszahl erstmalig von *v. Kármán* angegeben worden ist. Von ihm stammt auch die geradlinige Auftragung.

Einfluß der Zähigkeit — glattes Rohr

Es war schon erwähnt, daß bei geringerer Rauhigkeit die Zähigkeit Einfluß gewinnt, natürlich nur auf die Vorgänge in der Randschicht. Die Rauhigkeiten werden hier mehr oder minder von einer langsamer gleitenden Flüssigkeitsschicht eingehüllt und werden dadurch für den Widerstandsmechanismus unwirksam. Man kann hier auch wieder mit einer Dimensionsbetrachtung vorwärts kommen. Für das, was an der Wand vorgeht, ist bestimmend die Schubspannung an der Wand und damit die auf diese Schubspannung bezogene Geschwindigkeit v_*, ferner das Rauhigkeitsmaß k. Aus diesen beiden läßt sich mit der kinematischen Zähigkeit nach Analogie zur Reynoldsschen Zahl eine Wandkennzahl $v_* k/\nu$ bilden. Da der Strömungszustand im Innern bei festem v_* ungeändert bleibt, handelt es sich nur darum, die Integrationskonstante von Gl. (3) den neuen Verhältnissen anzupassen. Dies kommt darauf hinaus, daß man an Stelle von k in Gl. (5) bis (7) und (14) bis (16) eine abgeänderte Rauhigkeitsgröße

$$k' = k f_3\left(\frac{v_* k}{\nu}\right)$$

einführt. Über den Verlauf der Funktion f_3 ist nach dem früher Gesagten festzustellen, daß sie für große Werte der Wandkennzahl = 1 werden muß, um die früheren Beziehungen wieder zu erhalten. Wir können aber

[9]) Für genauere Ermittlungen hätte noch ein kleines Zusatzglied hinzuzukommen, das wir später wenigstens im Endergebnis berücksichtigen wollen.

[10]) *Darcy* [14] leitete aus seinen Versuchen die Gleichung

$$u_{max} - u = 11{,}3 \frac{\sqrt{i}}{r} (r - y)^{3/2}$$

ab; (i ist das Gefälle, also $= -\frac{1}{g\varrho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$; Längeneinheit ist das Meter); diese Gleichung läßt sich auf die Form von Gl. (8) bringen und liefert dabei

$$f_2\left(\frac{y}{r}\right) = 5{,}08 \left(1 - \frac{y}{r}\right)^{3/2},$$

was mit Ausnahme der Wandnähe, wo *Darcy* keine Messungen gemacht hat, gut zu den modernen Ergebnissen stimmt, s. Abb. 5.

auch sofort einen Schluß darauf ziehen, welche Gestalt die Funktion f_3 für kleine Werte von $v_* k/\nu$ annehmen muß. Die Beobachtungen zeigen, daß bei geringfügiger, aber sehr wohl noch feststellbarer Rauhigkeit das rauhe Rohr sich in bezug auf seinen Widerstand von einem vollkommen glatten Rohr praktisch nicht mehr unterscheidet, vorausgesetzt, daß die Reynoldssche Zahl nicht ungewöhnlich hoch ist. Ein derartiges Verhalten können wir bekommen, wenn wir

$$f_3\left(\frac{v_* k}{\nu}\right) = \text{Zahl} \cdot \frac{\nu}{v_* k}$$

setzen; denn auf diese Weise fällt k aus den eben aufgezählten Formeln fort und wird durch $\left(\text{Zahl} \cdot \frac{\nu}{v_*}\right)$ ersetzt. Die Versuche bestätigen dieses Ergebnis sehr gut und zeigen bezüglich der Zahl, die die Dimensionsbetrachtung noch offen läßt, daß statt unseres früheren Wertes $k/30$ nunmehr $\nu/9\,v_*$ gesetzt werden muß. An Stelle von Gl. (5a) ergibt sich jetzt die

Formel für die Geschwindigkeitsverteilung im Rohr

$$u = v_* \left(5{,}75 \log \frac{v_* y}{\nu} + 5{,}5\right) \quad \ldots\ldots (17).$$

Trägt man $\frac{u}{v_*}$ abhängig von $\log \frac{v_* y}{\nu}$ auf, so ergibt sich eine Gerade, die sämtliche einigermaßen wandnahen Punkte für die ausgebildeten Geschwindigkeitsprofile aller glatten Rohre enthalten muß. Eine Ausnahme bilden nur die Werte bei sehr kleinen „dimensionslosen Wandabständen" $\frac{v_* y}{\nu}$, bei denen sich noch eine Beeinflussung der Turbulenz durch die Zähigkeit ergibt. Bis auf die in der Fußanmerkung [9]) erwähnte Zusatzfunktion gilt auch Gl. (17) bis zur Rohrmitte. Die in Abb. 7 eingetragenen Versuchspunkte enthalten in Wirklichkeit nicht bloß die wandnahen Teile, sondern reichen bis nahe an die Rohrmitte heran. Man kann deshalb kleine systematische Abweichungen von der Geraden bemerken, die natürlich bei einer genaueren Theorie zu berücksichtigen sind [18].

In Abb. 7 ist zum Vergleich noch das auf Grund der Blasiusschen Rohrreibungsformel ermittelte Geschwindigkeitsverteilungsgesetz

$$\frac{u}{v_*} = 8{,}7 \left(\frac{v_* y}{\nu}\right)^{1/7} \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

durch eine gestrichelte Linie angegeben. Man erkennt, daß es in einem mittleren Bereich, über den früher allein Messungen vorlagen, praktisch mit der Geraden von Gl. (17) übereinstimmt, darunter und darüber aber erheblich abweicht. In der Tat hatte man schon seit längerem festgestellt, daß bei höheren Reynoldsschen Zahlen an Stelle der 7. Wurzel die 8., 9. usw. tritt. Die Erklärung für dieses Verhalten ist nunmehr offensichtlich, da jetzt das Gesetz der 7. Wurzel nur als eine Näherungsformel für das eigentliche Gesetz, das durch Gl. (17) dargestellt ist, erscheint, wobei die besonderen Zahlwerte der Näherungsformel natürlich noch von dem Bereich abhängen, innerhalb dessen sie mit der genauen Formel übereinstimmen sollen[11]).

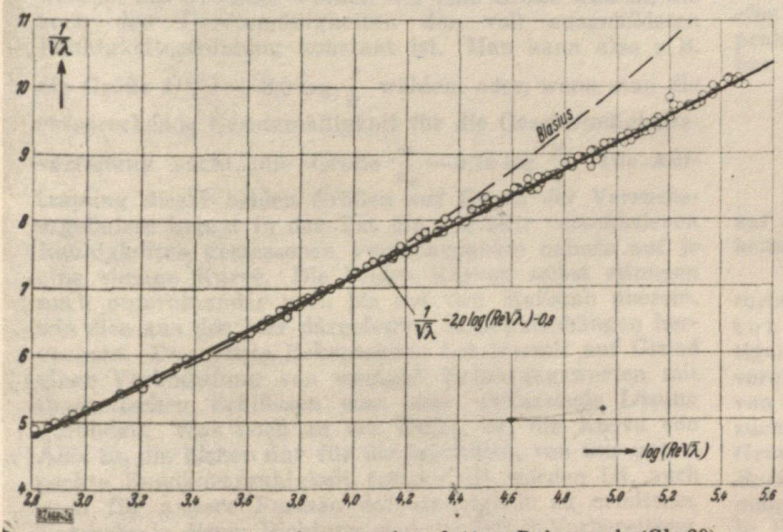

Abb. 8. Widerstandsgesetz im glatten Rohr nach (Gl. 20) mit Versuchswerten.

Für die Widerstandszahl erhält man aus Gl. (16) durch die gleiche Änderung

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2{,}0 \log \frac{v_* r}{\nu} + 0{,}5\,.$$

Hierbei kann noch unter Berücksichtigung von Gl. (13)

$$\frac{v_* r}{\nu} = \frac{\bar{u} r}{\nu} \frac{v_*}{\bar{u}} = \frac{\bar{u} d}{\nu} \sqrt{\lambda}\, \frac{1}{2\sqrt{8}}$$

gesetzt werden. Mit $\frac{\bar{u} d}{\nu} = Re$ ergibt sich somit

$$1/\sqrt{\lambda} = 2{,}0 \log (Re\sqrt{\lambda}) - 1{,}0 \quad \ldots (19).$$

Die Prüfung dieser Formel durch den Versuch ist von *Nikuradse* [20] bis zur Reynoldsschen Zahl von $3{,}4 \cdot 10^6$ durchgeführt worden und hat eine vorzügliche Geradlinigkeit ergeben. Es muß nur unter Berücksichtigung der mehrfach erwähnten Zusatzfunktion der Zahlwert $-1{,}0$ in $-0{,}8$ umgeändert werden; sodann lautet die

endgültige Formel für die Widerstandszahl

$$1/\sqrt{\lambda} = 2{,}0 \log (Re\sqrt{\lambda}) - 0{,}8 \quad (20).$$

Die Berechnung der Widerstandszahl, die zu einem bestimmten gegebenen Wert der Reynoldsschen Zahl gehört, macht keine besonderen Schwierigkeiten, obgleich $\sqrt{\lambda}$ auf der rechten Seite noch einmal vorkommt. Man kann nämlich erst auf der rechten Seite irgend-

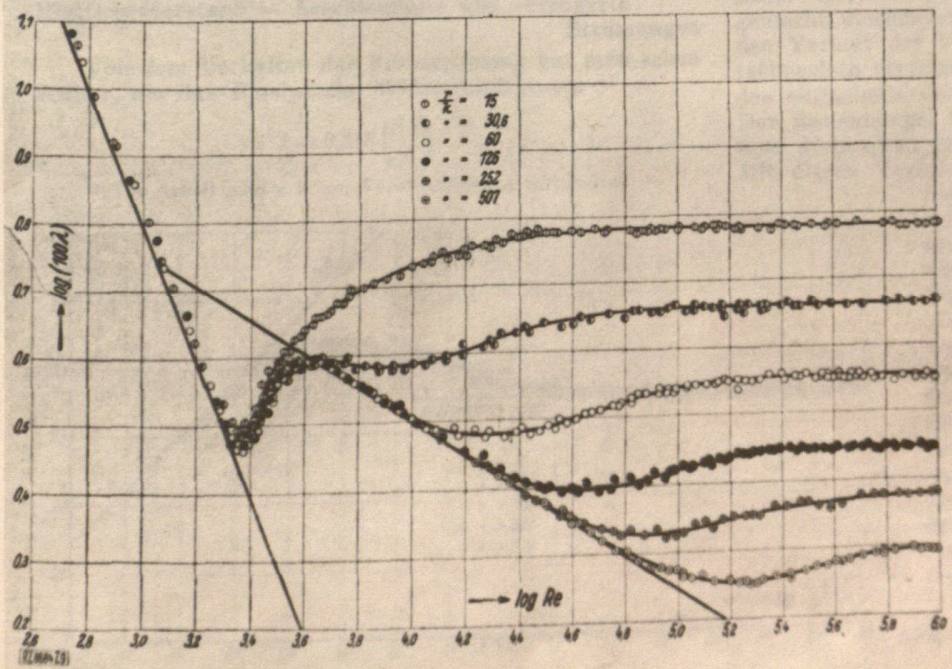

Abb. 9. Widerstandszahlen λ von rauhen Rohren.

Die Kurvenschar beruht auf Versuchen an Rohren mit gut definierter Rauhigkeit, hervorgebracht durch auf die Rohrwand geklebte Sandkörner bestimmter und von Rohr zu Rohr verschiedener Größe k

[11]) Unterhalb $\log \frac{v_* y}{\nu} = 2{,}0$ zeigt auch die Gerade von Gl. (17) deutliche Abweichungen von den Meßpunkten. Hierin ist ein Einfluß der Zähigkeit zu erkennen. Wenn man von den kleinsten überkritischen Reynoldsschen Zahlen absieht, betrifft diese Abweichung aber nur eine sehr dünne Schicht nahe der Rohrwand.